Test 5 – Sujet A

NOM et PRÉNOM :

Exercice 1 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2}\,.$$

(i) Trouver le domaine de définition de f.
(ii) Calculer sa dérivée f'.
(iii) Trouver les points critiques de f.
(iv) Trouver le signe de f' et dresser le tableau des variations de f.
(v) Parmi les points critiques, trouver les extrema locaux, et calculer la valeur de f dans ces points.
À l'aide des questions précédentes, tracer un graphe approximatif de f.

Exercice 2 On considère la fonction

$$\sigma(t) \;=\; \sin(2t^2 - 3t)\,.$$

(i) Calculer $\sigma(0)$, $\sigma'(0)$ et $\sigma''(0)$.
(ii) Écrire le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de σ autour du point $t_0 = 0$.
*(iii) À l'aide de la formule de Taylor-Young et du polynôme trouvé ci-dessus, calculer

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sigma(t)}{t}\,.$$

Test 5 – Sujet A

Test 5 – Sujet A **Corrigé du test**

Exercice 3

(i) La quantité $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2-3x+2 \neq 0$, et le polynôme x^2-3x+2 se factorise en $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Par conséquent, le domaine de définition de f est

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}\backslash\{1,2\}}.$$

(ii) En utilisant la règle de Leibniz, on obtient

$$f'(x) \;=\; \frac{2x+1}{x^2-3x+2} + (x^2+x+2)\,\frac{(-1)\,(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{4\,(-x^2+2)}{(x^2-3x+2)^2} = \boxed{-4\,\frac{(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2})}{(x-1)^2(x-2)^2}}.$$

(iii) Alors, les points critiques de f sont $x_1=-\sqrt{2}$ et $x_2=\sqrt{2}$.

(iv) Avec la règle des signes, on trouve que $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ et $x \neq 1$ (à cause du domaine de f). Donc, f est croissante seulement sur cet intervalle.

(v) Grâce à l'étude précédente, on trouve que $x_1=-\sqrt{2}$ est un point de minimum local et $x_2=\sqrt{2}$ est un point de maximum local. En plus, on a

$$f(-\sqrt{2}) \;=\; \frac{4-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad f(\sqrt{2}) \;=\; \frac{4+\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}\,.$$

Exercice 4

(i) On voit facilement que $\sigma(0)=0$. Si on calcule la dérivée première, on trouve

$$\sigma'(t) \;=\; \cos(2t^2-3t)\,(4t-3) \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma'(0)=-3\,.$$

En dérivant encore, on a l'expression pour σ'' :

$$\sigma''(t) \quad = \quad -\sin(2t^2-3t)\,(4t-3)^2 \;+\; 4\,\cos(2t^2-3t)\,,$$

d'où on trouve $\sigma''(0)=4$.

(ii) Grâce aux calculs précédents, on obtient (pour $t \sim 0$)

$$\sigma(t) \;=\; -3t \;+\; 2t^2 \;+\; o\left(t^2\right)\,.$$

(iii) Vu que $t \to 0$, on peut utiliser le développement de σ qu'on vient de prouver. On a donc

$$\frac{\sigma(t)}{t} \;=\; \frac{-3t \;+\; 2t^2 \;+\; o\left(t^2\right)}{t} \;=\; -3 \;+\; 2t \;+\; \frac{o\left(t^2\right)}{t} \;\longrightarrow -3$$

pour $t \to 0$.